

دنباله حسابی

دنباله ای که هر جمله آن از جمع جمله قبلی با یک عدد ثابت بدست می آید. به عبارت دیگر تفاضل هر دو جمله متوالی عدد ثابتی است که این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله حسابی می گویند و با d نمایش می دهند.

$$a_n = a + (n-1)d$$

جمله عمومی دنباله حسابی

تست : در دنباله حسابی $3\sqrt{2} + 5, 4(\sqrt{2} + 1), 5\sqrt{2} + 3, \dots$ نسبت جمله چهاردهم به جمله ششم کدام است ؟

تست : جمله چندم دنباله حسابی \dots و 8 و 5 و 2 برابر 56 است ؟

تست : چند جمله از دنباله حسابی \dots و 158 و 169 و 180 - منفی است ؟

تست : در یک دنباله $8 = 5a_1 + 3a_2 - 2a_3$ برقرار است ، حاصل $5a_1 - 3a_2 - 2a_3$ کدام است ؟

تست : جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = (b-3)n^2 - 2bn + 4$ است. جمله سوم را تعیین کنید .

نکته : دنباله حسابی را به صورت بازگشتی نیز می توان تعریف کرد :

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad a_1 = a$$

جمله عمومی دنباله حسابی

تست : در یک دنباله حسابی $t_1 = 4, t_{n+1} = t_n + 3$ جمله n ام آن چیست ؟

نکته: اگر دو جمله مانند a_m, a_n از دنباله حسابی را داشته باشیم: $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$

⇐ بنا بر این تفاضل دو جمله از دنباله حسابی به صورت مقابل است: $a_m - a_n = (m - n)d$

⇐ هر جمله را می توان با استفاده از یکی از جملات قبل از خود نوشت: $a_m = a_n + (m - n)d$

⇐ تعداد جملات یک دنباله حسابی با جمله اول و آخر b, a برابر است با: $n = \frac{b - a}{d} + 1$

تست: اگر جمله بیستم دنباله عددی ۴۰ و جمله سی ام ۸۰ باشد، جمله بیست و سوم کدام است؟

$$d = \frac{80 - 40}{30 - 20} = 4 \Rightarrow a_{33} = a_{30} + 3 \times d \Rightarrow a_{33} = 40 + 12 = 52$$

تست: تفاضل جمله دهم از دوازدهم ۵ و مجموع آنها ۲۵ است. جمله ۲۱ ام کدام است؟

تست: بین اعداد ۱۲- و ۵۲ سه واسطه حسابی درج کرده ایم. مجموع این سه واسطه چقدر است؟

تست: بین ۸ و ۶۳ تعدادی عدد قرار داده ایم که کل اعداد تشکیل دنباله حسابی دهند. و تفاضل بزرگ ترین و کوچک ترین آنها ۳۳ است. مجموع کل جملات دنباله کدام است؟

حل: اگر بین این دو عدد m واسطه حسابی باشد داریم: $a_1, \boxed{a_2, \dots, a_{m+1}}, a_{m+2}$

$$d = \frac{63 - 8}{m + 2 - 1} = \frac{33}{m + 1 - 2} \Rightarrow \frac{55}{m + 1} = \frac{33}{m - 1} \Rightarrow m = 4 \Rightarrow d = 11 \Rightarrow \boxed{19, 30, 41, 52} \xrightarrow{+} 213$$

نکته: اگر دو دنباله حسابی جملات مشترک داشته باشند، این جملات، دنباله حسابی تشکیل می دهند که قدر نسبت آن ک.م.قدر نسبت دو دنباله قبل است.

به آسونی کنکور..... دنباله.....مرتضی بابالویان

تست: در دنباله های عددی $3, 7, 11, \dots$ و $4, 7, 10, \dots$ چند جمله کوچکتر مساوی از ۵۰۰ وجود دارد؟

تست: در دو دنباله حسابی $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

قانون جمع اندریس ها: اگر $m+n=p+q$ آنگاه $a_m + a_n = a_p + a_q$

← اگر $m+n$ زوج باشد: $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$

← اگر x, y, z سه جمله هم فاصله باشد داریم: $x+z=2y$

تست: در یک دنباله حسابی $a_1 + a_{13} = a$ و جمله نهم b ، است جمله یازدهم کدام است؟

$$a_1 + a_{11} = a_1 + a_{13} = a \Rightarrow b + a_{11} = a \Rightarrow a_{11} = a - b$$

تست: در یک دنباله حسابی جمله بیست و پنجم 70 و جمله سی و پنجم 130 است. جمله سی ام کدام است؟

تست: در یک تصاعد عددی $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} = 20$ و $a_4 = 3$ حاصل a_5 کدام است؟

$$a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} = 20 \Rightarrow 2a_4 + 2a_5 = 20 \Rightarrow a_4 + a_5 = 10 \Rightarrow 3 + a_5 = 10 \Rightarrow a_5 = 7$$

تست: اعداد $3 + 4, 2p + 4, 3p - 1, 5p$ سه جمله متوالی از دنباله عددی هستند. قدر نسبت دنباله کدام است؟

تست: در یک تصاعد عددی $a_1 + a_4 + a_7 = 8$ و $a_4 + a_7 + a_{10} = 2$ قدر نسبت کدام است؟

$$3a_4 = 8 \Rightarrow a_4 = \frac{8}{3}, \quad 2a_7 = 2 \Rightarrow a_7 = \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{a_7 - a_4}{7-4} = \frac{-2}{3}$$

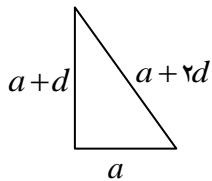
تست : در یک دنباله حسابی $a_1 = 1$ و $a_4 = \frac{5}{3}$ ، حاصل $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{23} + a_{25} + a_{27}}$ کدام است ؟

تست : در یک مثلث قائم الزاویه با ضلع کوچکتر a ، اضلاع تشکیل دنباله حسابی می دهند . محیط مثلث کدام است ؟

حل : با استفاده از واسطه حسابی مشخص می شود که تنها مثلث قائم الزاویه ای که اضلاعش تشکیل دنباله حسابی می دهند مثلثی است که اضلاعش به صورت $3d, 4d, 5d$ باشد .

$$P = 3d + 4d + 5d = 12d \xrightarrow{a=3d} 12 \times \frac{a}{3} = 4a$$

اثبات ادعای بالا :



$$(a+2d)^2 = a^2 + (a+d)^2 \Rightarrow a^2 - 2ad - 3d^2 = 0 \Rightarrow (a+d)(a-3d) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ a-3d=0 \Rightarrow \boxed{a=3d} \end{cases}$$

تست : در یک مثلث زاویه های داخلی تشکیل دنباله حسابی می دهند . اندازه یکی از زاویه ها کدام است ؟

تست : مجموع سه جمله متوالی دنباله حسابی ۲۷ و حاصل ضرب آنها ۶۴۸ است . جمله بزرگ تر کدام است ؟ (خاص)

حل : سه جمله را $a-d, a, a+d$ فرض می کنیم و داریم :

$$a-d + a + a+d = 27 \Rightarrow 3a = 27 \Rightarrow a = 9$$

$$(a-d)a(a+d) = 648 \Rightarrow 9(9^2 - d^2) = 648 \Rightarrow (9^2 - d^2) = 72 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

مجموع جملات دنباله حسابی اگر جمله آخر مشخص باشد : $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

تست : حاصل مجموع $S = 7 + 8 + 17 + 18 + 27 + 28 + \dots + 197 + 198$ کدام است ؟

$$S = 15 + 35 + 55 + \dots + 395 \xrightarrow{n = \frac{395-15}{20} + 1 = 20} S = \frac{20}{2}(395 + 15) = 4100$$

تست : حاصل مجموع $S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ کدام است ؟

تست : مجموع اعداد بین ۱۰۰ تا ۳۰۰ که باقیمانده آنها بر ۶ برابر ۲ است . کدام است ؟

تست : مقدار x از معادله $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$ کدام است ؟

تست : اعداد طبیعی فرد را طوری دسته بندی کرده ایم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته است .

... , (7, 9, 11), (3, 5), (1) جمله آخر دسته بیستم کدام است ؟ (۹۱ ریاضی)

حل : تعداد جملات در هر دسته ۱, ۲, ۳, ... پس تعداد کل جملات تا دسته بیستم $\frac{20}{2}(1+20) = 210$ است که جمله ۲۱۰ ام همان

جمله آخر دسته بیستم و ۲۱۰ امین عدد فرد طبیعی یعنی : $a_{210} = 1 + 209 \times 2 = 419$

تست : اعداد طبیعی را طوری دسته بندی کرده ایم که آخرین جمله هر دسته مربع کامل باشد ... , (5, 6, 7, 8, 9), (2, 3, 4), (1)

مجموع جملات دسته دهم کدام است ؟

حل : تعداد جملات در هر دسته ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ... پس تعداد کل جملات تا دسته دهم $\frac{10}{2}(1+19) = 100$ است که ۱۹ جمله آخر

$$\frac{19}{2}(182 + 100) = 1729 \text{ برابر است با}$$

به آسونی کنکور..... دنباله.....مرتضی بابالویان

تست : در بیست جمله اول از دنباله عددی ، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است . جمله اول کدام است ؟

حل : ۱۰ جمله در ردیف فرد و ۱۰ جمله در ردیف زوج داریم که در اولی از a_1, \dots, a_{10} و در دومی a_1, \dots, a_{10} پس :

$$\left. \begin{aligned} \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) &= 135 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 27 \Rightarrow a_{10} = 13/5 \\ \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) &= 150 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 30 \Rightarrow a_{10} = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = 1/5 \xrightarrow{a+10d=15} a = 0$$

تست : در یک تصاعد عددی $a_5 + a_8 = 21$ مجموع دوازده جمله اول کدام است ؟

$$a_1 + a_{12} = a_5 + a_8 = 21 \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(21) = 126$$

نکته : در دنباله ای با تعداد جملات فرد ، مجموع جملات n برابر جمله وسط است.

تست : مجموع $2n+1$ جمله یک دنباله حسابی ۱۴۳ و جمله وسط ۱۳ است . n کدام است ؟

حل : $n = 5 \Rightarrow 143 = 13(2n+1)$ اگر عدد حاصل فرد نبود ، چنین دنباله ای موجود نبود. (باید عدد وسط داشته باشد)

مجموع جملات دنباله حسابی اگر جمله آخر مشخص نباشد : $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

تست : جملات چهارم و شانزدهم دنباله حسابی به ترتیب ۲۵ و ۱۰ هستند . مجموع ۱۰ جمله اول کدام است ؟

تست : اعداد $1, x, y, \frac{5}{2}, \dots$ چهار جمله اول دنباله حسابی هستند . مجموع ۱۵ جمله اول کدام است ؟

تست : در دنباله ... 5, 8, 11, ... حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از 500 بیشتر شود ؟

تست : در یک دنباله عددی ، جمله هفتم نصف جمله سوم است . مجموع چند جمله اول از دنباله صفر است ؟

$$\frac{a+6d}{a+2d} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -10d \rightarrow S_n = \frac{n}{2}(-20d + (n-1)d) = 0 \Rightarrow n(-20 + (n-1))d = 0 \xrightarrow{d \neq 0} n(n-21) = 0 \Rightarrow n = 21$$

تست : اگر به قدر نسبت یک دنباله حسابی 1 واحد افزوده شود به مجموع 20 جمله اول چقدر اضافه می شود ؟

تست : در یک دنباله حسابی مجموع 10 جمله اول ، $\frac{1}{3}$ مجموع 10 جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است ؟

$$S_{10} = \frac{1}{3}(S_{20} - S_{10}) \Rightarrow S_{20} = 4S_{10} \Rightarrow \cancel{10} \cdot (2a + 19d) = \frac{4 \times \cancel{10}}{2} (2a + 9d) \Rightarrow d = 2a \Rightarrow \frac{a_{10}}{a_1} = \frac{a+d}{a} = \frac{3a}{a} = 3$$

تست : در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول 3 برابر مجموع دوازده جمله اول است . اگر جمله سوم 6 باشد ، جمله دهم کدام است ؟

تست : از مبلغ A ریال پس انداز ، مرتبه اول $x_1 = \frac{A}{15}$ و مرتبه دوم $x_2 = \frac{A}{15} + x_1$ و برداشت می کنیم . با چنین برداشتی پس از چند مرتبه موجودی به صفر می رسد ؟

حل : دنباله ... $\frac{A}{15}, \frac{2A}{15}, \frac{3A}{15}, \dots$ است که مجموع برداشت ها باید به اندازه مبلغ اولیه باشد تا موجودی صفر شود :

$$A = \frac{n}{2} \left(2 \times \frac{A}{15} + (n-1) \frac{A}{15} \right) \Rightarrow 1 = \frac{n(n+1)}{30} \Rightarrow n(n+1) = 30 \Rightarrow n = 5$$

نکته: اگر مجموع k جمله اول و آخر داده شده باشد مجموع کل جملات: $S_n = \frac{n}{2} \left(\frac{\text{مجموع جملات آخر} + \text{مجموع جملات اول}}{k} \right)$

تست: در یک تصاعد عددی با ۲۰ جمله، مجموع پنج جمله اول ۲۲ و مجموع پنج جمله آخر ۳۳ است. مجموع کل جملات کدام است؟

نکته: اگر مجموع m جمله و n جمله اول داده شده باشد، مجموع $m+n$ جمله اول: $S_{m+n} = \frac{m+n}{m-n} \times (S_m - S_n)$

تست: اگر مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حسابی ۲۵ و مجموع ۱۰ جمله بعدی آن ۴۵ باشد. مجموع ۳۰ جمله اول آن چقدر است؟

تست: اگر در یک دنباله حسابی $S_{10} = a$ و $S_{20} = b$ باشد، آنگاه S_{30} کدام است؟

$$\left. \begin{array}{l} S_{10} = a \\ S_{20} = b \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} S_{30} = b \\ S_{40} = 2(b-a) \end{array} \right\} \Rightarrow S_{30} = 7(b-2a)$$

نکته: اگر مجموع m جمله و n جمله اول داده شده باشد، با فرض $S'_m = \frac{S_m}{m}$ ، $S'_n = \frac{S_n}{n}$ داریم: $d = 2 \left(\frac{S'_m - S'_n}{m-n} \right)$

$$S_{am} - aS_n = \binom{a}{2} n^2 d \leftarrow$$

تست: در یک دنباله حسابی $S_{12} = 132$ و $S_{21} = 420$ است. قدر نسبت کدام است؟

تست : حاصل $\frac{S_{2n} - 2S_n}{d}$ کدام است ؟

نکته : در دنباله حسابی $S_n = An^2 + Bn$ تابعی درجه دوم فاقد جمله ثابت است که $A = \frac{d}{2}$ است . (توجه: $a_1 = S_1$)

تست : اگر مجموع جملات دنباله حسابی $S_n = (ab - 4)n^2 + \frac{n^2}{2} + b - 8$ باشد ، a کدام است ؟

تست : اگر $S_n = n(4n + 1)$ ، جمله ۲۱ ام کدام است ؟

$$d = 8 \Rightarrow a_1 = S_1 = 5 \Rightarrow a_{21} = 5 + (21 - 1) \times 8 = 165$$

تست : مجموع n جمله اول دنباله حسابی $S_n = n^2 + n$ است . حاصل $a_7 + a_8 + a_9$ چقدر است ؟ ($S_9 - S_6$)

دنباله هندسی

دنباله ای که هر جمله آن از ضرب جمله قبلی در یک عدد ثابت بدست می آید. به عبارت دیگر خارج قسمت هر دو جمله متوالی عدد ثابتی است که این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله هندسی می گویند و با q نمایش می دهند.

$$a_n = aq^{n-1} \quad \text{جمله عمومی دنباله هندسی}$$

توجه: اگر $q < 0$ دنباله غیر یکنوا ولی دنباله با شرط $q > 1$ صعودی و با شرط $0 < q < 1$ نزولی است.

تست: اگر a_1, a_2, a_3 سه جمله اول دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ باشد. در کدام گزینه سه جمله اول دنباله هندسی آورده شده است؟ (جایگذاری اعداد دلخواه)

$$(1) \quad a_1 + 1, a_2 + a_1, a_3 + a_2$$

$$(2) \quad a_1 + 1, a_2 + 4, a_3 + 16$$

$$(3) \quad a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3$$

$$(4) \quad a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 4$$

تست: تصاعد هندسی $1, 2, 3, \dots, 2048$ چند جمله دارد؟

توجه: دنباله هندسی را به صورت بازگشتی نیز می توان تعریف کرد:

$$a_{n+1} = qa_n, \quad a_1 = a$$

تست: در رشته ای $t_1 = 5$ و به ازای $n > 1$ ، $t_{n+1} = 4t_n$ ، جمله n ام آن کدام است؟

تست: دنباله $a_n = 3 \times 2^n$ به صورت بازگشتی کدام است؟

نکته: اگر دو جمله مانند a_m, a_n از دنباله هندسی را داشته باشیم: $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$

← هر جمله را می توان با استفاده از یکی از جملات قبل از خود نوشت: $a_m = a_n \times q^{m-n}$

تست: در یک تصاعد هندسی غیر یکنوا $a_7 = 16$ و $a_9 = 256$ جمله دهم کدام است؟

$$q^{9-7} = \frac{256}{16} \Rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow{q < 0} q = -2 \Rightarrow a_{10} = a_9 \times q = 256 \times (-2) = -512$$

تست: بین اعداد ۸ و $\frac{81}{2}$ سه واسطه هندسی مثبت درج شده است. جمله دوم دنباله کدام است؟

تست: بزرگ ترین جمله دنباله هندسی $\frac{1}{24}, d, \frac{1}{3}, c, b, a$ کدام است؟

قانون جمع انریس ها: در دنباله هندسی اگر $m+n = p+q$ آنگاه $a_m \times a_n = a_p \times a_q$

← اگر $m+n$ زوج باشد: $a_m \times a_n = a_{\frac{m+n}{2}}^2$

← اگر x, y, z سه جمله هم فاصله باشد داریم: $xz = y^2$

تست: در یک دنباله هندسی جمله چهارم $2\sqrt{3}$ و جمله ششم $4\sqrt{3}$ است. جمله پنجم کدام است؟

تست: در یک تصاعد هندسی $a_1 = 3$ و $a_7 = 6$ حاصل $\frac{a_5 \times a_7 \times a_9}{a_4 \times a_6 \times a_8}$ کدام است؟

تست : حاصل ضرب ۵ جمله اول دنباله هندسی $2^{50} \times 3^{15}$ است، جمله سوم کدام است ؟

تست : در یک دنباله حسابی $a_4 a_{23} = 28$ و $a_{15} a_{37} = 63$ ، حاصل $a_{12} a_{26}$ کدام است ؟

$$(a_{12})^2 = 28 \quad , \quad (a_{26})^2 = 63 \quad \Rightarrow (a_{12} \times a_{26})^2 = 4 \times 7 \times 9 \times 7 \Rightarrow a_{12} \times a_{26} = 2 \times 7 \times 3 = 42$$

تست : اعداد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند . واسطه عددی a, b کدام است ؟

تست : در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه عدد کدام است ؟ (خاص)

حل : سه جمله متوالی را به صورت $\frac{a}{q}, a, aq$ در نظر می گیریم :

$$\frac{a}{q} \times a \times aq = a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{q} + a + aq = a\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 19 \Rightarrow 6 + 6q + 6q^2 = 19q \Rightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow q = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$$

نکته : اگر جملاتی از دنباله ای حسابی ، تشکیل دنباله ای هندسی بدهند . قدر نسبت دنباله هندسی : $q = \frac{m-n}{n-k}$

تست : اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند . قدر نسبت دنباله هندسی کدام است ؟

تست : در یک دنباله عددی ، جملات سوم ، هفتم و نهم می توانند سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند . جمله چندم این دنباله صفر است ؟

حل : اگر جملات a_1, a_2, a_3 از یک دنباله حسابی سه جمله متوالی دنباله هندسی باشد آنگاه داریم :

$$a_2^2 = a_1 \times a_3 \Rightarrow (a+2d)^2 = (a+d)(a+3d) \Rightarrow 2ad + 2d^2 = 0 \Rightarrow 2d(a+d) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a+d = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

مجموع جملات دنباله هندسی :

الف) مجموع n جمله اول :
$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

⇐ اگر مجموع n جمله اول و مجموع $2n$ جمله اول را داشته باشیم :
$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1+q^n$$

ب) مجموع تمام جملات (حد مجموع) : $|q| < 1$,
$$S_\infty = \frac{a}{1-q}$$

تست : حاصل عبارت $\frac{x^{11} + x^{10} + x^9 + \dots + \boxed{x} + 1}{x^9 + x^8 + \boxed{x^3} + 1}$ به ازای $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است ؟ (سراسری ۹۳ داخل)

تست : مقدار عبارت $A = (1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است ؟

تست : مجموع چند جمله از دنباله هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر ۱۰۲۶ است ؟

تست : در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم ۱ و مجموع چهار جمله اول ۳ است . مجموع شش جمله اول کدام است ؟

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+q^2) = 1 \\ aq(1+q^2) = 3 \end{cases} \xrightarrow{\div} q = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \Rightarrow S_6 = \frac{\frac{1}{5} \times (1-2^6)}{1-2} = \frac{63}{5}$$

تست : در یک دنباله هندسی جملات اول و n ام به ترتیب $\frac{3}{4}$ و 12 و مجموع n جمله اول $\frac{93}{4}$ است . قدر نسبت این دنباله هندسی کدام است ؟

$$q^{n-1} = \frac{12}{\frac{3}{4}} \Rightarrow q^n = 16q \Rightarrow S_n = \frac{\frac{3}{4}(1-q^n)}{1-q} = \frac{93}{4} \Rightarrow \frac{1-16q}{1-q} = 31 \Rightarrow q = 2$$

تست : در یک دنباله هندسی با تعداد جملات زوج ، اگر مجموع تمام جملات 3 برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد ، قدر نسبت کدام است ؟ (سراسری ۹۴ ریاضی) (سوال خاص)

حل : چون تعداد کل جملات زوج است پس تعداد جملات ردیف فرد (یا زوج) $\frac{n}{2}$ است .

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{n-1} = a + aq^2 + aq^4 + \dots + aq^{n-2} = \frac{a(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2} = \frac{a(1-q^n)}{1-q^2} \Rightarrow \frac{a(1-q^n)}{1-q} = 3 \times \frac{a(1-q^n)}{1-q^2} \Rightarrow 1 = \frac{3}{1+q} \Rightarrow q = 2$$

.....

تست : در دنباله هندسی نزولی بین جملات رابطه $\frac{a_1 a_3 a_5}{(a_4)^3} = 64$ برقرار است مجموع شش جمله اول چند برابر جمله اول است ؟

تست : در دنباله هندسی مجموع سه جمله اول 136 و مجموع شش جمله اول 153 است . جمله اول چند برابر جمله پنجم است ؟

$$\frac{S_6}{S_3} = 1+q^3 \Rightarrow 1+q^3 = \frac{153}{136} = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{a_5} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{16}$$

تست : در دنباله هندسی با قدر نسبت 2 ، اگر مجموع پنج جمله اول 20 باشد مجموع ده جمله اول چقدر است ؟

.....

تست : حاصل $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \frac{1}{729} + \dots$ کدام است ؟

حل : عبارت را جدا می کنیم :

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \dots\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{243} + \dots\right) - \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{729} + \dots\right) = \frac{15}{26}$$

تست : حاصل مجموع $\frac{3-2}{6} + \frac{3^2-2^2}{6^2} + \frac{3^3-2^3}{6^3} + \dots$ کدام است ؟

حل : عبارت را به صورت زیر بازنویسی می کنیم :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

تست : حاصل $A = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \dots$ کدام است ؟

حل : می توان با ترفند زیر آن را به دنباله هندسی تبدیل کرد :

$$3A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots \Rightarrow 3A - A = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \Rightarrow 2A = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

تست : در یک دنباله هندسی حد مجموع جملات سه برابر جمله اول است . قدر نسبت دنباله کدام است ؟

تست : در دنباله نزولی $a, \frac{a}{4}, \frac{a}{4^2}, \dots$ حد مجموع جملات ، از جمله سوم به بعد برابر $\frac{1}{4}$ است . حد مجموع کل جملات چقدر

است ؟

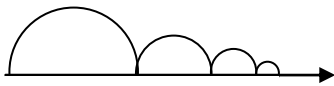
تست : در یک دنباله هندسی نامحدود هر جمله k برابر مجموع جملات بعد از خود است . قدر نسبت دنباله کدام است ؟

$$a = k\left(\frac{a}{1-q}\right) \Rightarrow a = k\left(\frac{aq}{1-q}\right) \Rightarrow 1 = \frac{kq}{1-q} \Rightarrow q = \frac{1}{k+1}$$

تست : حد مجموع یک دنباله هندسی ۸ و حد مجموع مربعات جملات $\frac{64}{3}$ است . جمله اول کدام است ؟

$$\left. \begin{array}{l} * \frac{a}{1-q} = 8 \\ \frac{a^2}{1-q^2} = \frac{64}{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\div} \frac{a}{1+q} = \frac{8}{3} \Rightarrow 1+q = \frac{3}{8}a \Rightarrow \begin{cases} * 1-q = \frac{1}{8}a \\ 1+q = \frac{3}{8}a \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

تست : موجی بر روی نیم دایره های بالای یک محور حرکت می کند . با قطر اولیه ۱ واحد ، هر بار که به محور برخورد می کند ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می شود . اندازه محیط این نیم دایره های متوالی کدام است ؟



حل : هر بار $80\% = \frac{4}{5}$ قطر باقی می ماند و محیط اولیه نیز $\frac{\pi}{2}$ است پس :

$$S_{\infty} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{2}$$

تست : توپی از ارتفاع a رها می شود و هر بار که با زمین برخورد می کند $\frac{9}{10}$ ارتفاع قبلی خود بالا می رود . کل مسافت طی شده توسط توپ تا لحظه ایستادن چقدر است ؟

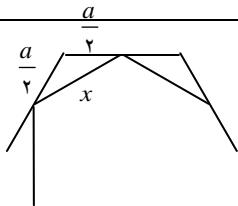
تست : طول ضلع مربعی ۱ متر است . ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم ، سپس نیمی از قسمت باقی مانده را رنگ می کنیم و این کار را ادامه می دهیم . حداقل چند مرحله طول می کشد تا ۹۹ درصد مربع رنگ شود ؟

تست : شخصی روز اول مقدار a تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد که هر روز $\frac{9}{10}$ پول واریزی روز قبل را در صندوق قرار دهد. در نهایت پول صندوق به کدام عدد خیلی نزدیک می شود ولی به آن نمی رسد ؟

نکته: اگر اوساط n ضلعی های منتظم (معمولا مثلث، مربع، شش ضلعی) را به هم وصل کنیم و این کار را ادامه دهیم و بخواهیم حد مجموع محیط ها یا مساحت ها را حساب کنیم داریم:

$$q = \cos \frac{\pi}{n} \quad \text{قدر نسبت برای محیط}$$

$$q = \cos^2 \frac{\pi}{n} \quad \text{قدر نسبت برای مساحت}$$



اثبات: طول ضلع مرحله جدید با استفاده از قانون کسینوس ها در مثلث

محاسبه می شود:

$$\theta = \frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \cos \theta = -\cos \frac{2\pi}{n}$$

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\cos \theta = \left(2 + 2\cos \frac{2\pi}{n}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right) \times \frac{a^2}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{n} \times a^2 \Rightarrow \boxed{x = a \cos \frac{\pi}{n}}$$

تست: اوساط اضلاع یک شش ضلعی منتظم به ضلع a را به هم وصل می کنیم و در شش ضلعی منتظم بوجود آمده نیز همین کار را انجام داده و ادامه می دهیم. حد مجموع محیط شش ضلعی ها چقدر است؟

حل: محیط اولیه $6a$ و قدر نسبت $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ است لذا:

$$S_{\infty} = \frac{6a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12a}{2 - \sqrt{3}} = 12a(2 + \sqrt{3})$$

تست: اوساط یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به هم وصل می کنیم و در مثلث متساوی الاضلاع بوجود آمده نیز همین کار را تکرار می کنیم و این کار را ادامه می دهیم. حد مجموع مساحت مثلث ها چقدر است؟

حل: مساحت اولیه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ و قدر نسبت $\cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$ است لذا:

$$S_{\infty} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$