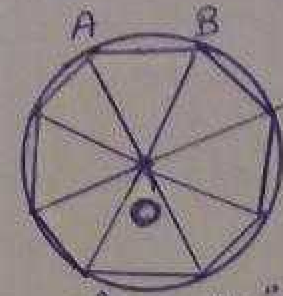
۱۲۵ـ گزینه‌ی ۱



مطابق شکل، هشت‌ضلعی منتظم به هشت مثلث همنهشت و در نتیجه هم‌مساحت تقسیم می‌شود. داریم:

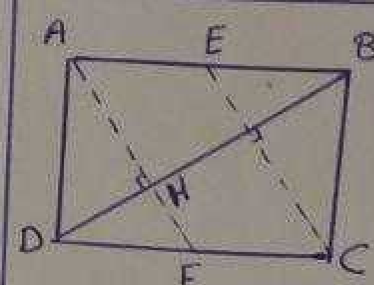
$A\hat{O}B = \frac{۳۶۰^\circ}{۸} = ۴۵^\circ$

$S_{OAB} = \frac{۱}{۲} OA \times OB \times \sin ۴۵^\circ$

$= \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$

$S_{\text{هشت‌ضلعی}} = ۸ S_{OAB} = ۸\sqrt{۲}$

۱۲۶ـ گزینه‌ی ۱



$\triangle ABD: BD^۲ = AB^۲ + AD^۲$

$\Rightarrow BD^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵$

$\Rightarrow BD = ۵$

$\triangle ABD: AD^۲ = BD . DH \Rightarrow ۹ = ۵DH$

$\Rightarrow DH = \frac{۹}{۵} \Rightarrow BH = ۵ - \frac{۹}{۵} = \frac{۱۶}{۵}$

$\triangle ABD: AH^۲ = BH . DH = \frac{۱۶}{۵} \times \frac{۹}{۵} = \frac{۱۴۴}{۲۵}$

$\Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵}$

$\left.\begin{matrix}\hat{A} = \hat{A} \\ \hat{H} = \hat{D}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle AHD \sim \triangle ADF$

$\Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{DH}{DF} \Rightarrow \frac{\frac{۱۲}{۵}}{۳} = \frac{\frac{۹}{۵}}{DF}$

$\Rightarrow DF = \frac{۹}{۴} = ۲,۲۵ \Rightarrow CF = ۴ - ۲,۲۵ = ۱,۷۵$

$S_{AECF} = AD . CF = ۳ \times ۱,۷۵ = ۵,۲۵$

۱۲۷ـ گزینه‌ی ۲

شکل حاصل از دوران مستطیل، استوانه‌ای به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده‌ی ۲ و شکل حاصل از دوران نیم‌دایره، کره‌ای به شعاع $\frac{۳}{۲}$ است. داریم:

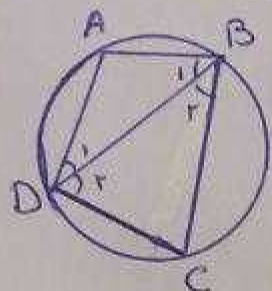
$V_{\text{استوانه}} = \pi (۲)^۲ \times ۵ = ۲۰\pi$

$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳} \pi \left(\frac{۳}{۲}\right)^۳ = \frac{۹}{۲}\pi$

بنابراین حجم ناحیه‌ی محدود به مستطیل و نیم‌دایره برابر است با:

$V = ۲۰\pi - \frac{۹}{۲}\pi = \frac{۳۱}{۲}\pi = ۱۵,۵\pi$

۱۲۸ـ گزینه‌ی ۴



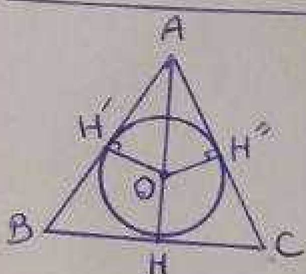
هرچه وتری بزرگ‌تر باشد به مرکز دایره نزدیک‌تر است، بنابراین AB کوچک‌ترین ضلع و BC بزرگ‌ترین ضلع چهارضلعی است.

$\triangle ABD: AB < AD \Rightarrow \hat{D}_۱ < \hat{B}_۱$

$\triangle BDC: BC > CD \Rightarrow \hat{D}_۲ > \hat{B}_۲$

با توجه به دو رابطه‌ی فوق، نمی‌توان نتیجه گرفت که $\hat{B} > \hat{D}$.

۱۲۹ـ گزینه‌ی ۲



مطابق شکل $OH = OH' = OH'' = ۳$ و در نتیجه $OA = ۵$ است.

$\triangle OAH': AH'^۲ = OA^۲ - OH'^۲ = ۲۵ - ۹$

$\Rightarrow AH'^۲ = ۱۶ \Rightarrow AH' = ۴$

حال اگر $BH = HC = x$ فرض شود، با توجه به آن که مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره، برابر یکدیگرند، داریم:

$AH'' = AH' = ۴$

$BH' = BH = CH = CH'' = x$

اگر S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث باشد، آن‌گاه:

$r = \frac{S}{P} \Rightarrow ۳ = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲x}{۴ + ۲x}$

$\Rightarrow ۱۲ + ۶x = ۸x \Rightarrow ۲x = ۱۲$

بنابراین طول قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین ABC، برابر ۱۲ است.

۱۳۰ - گزینه‌ی ۳

تصویر دایره‌ی $C(O,R)$ که در آن $O=(1,2)$ و $R=1$ است، تحت تبدیل $T(x,y)=(3x,3y)$، دایره‌ی $C(O',R')$ است که در آن $O'=(3,6)$ و $R'=3$ می‌باشد. داریم:

$$d = OO' = \sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} = \sqrt{20-(3-1)^2} = \sqrt{16} = 4$$

---

۱۳۱ - گزینه‌ی ۲

اگر خطی با صفحه‌ی مفروض موازی باشد، آن‌گاه آن خط لااقل با یک خط از آن صفحه موازی است، بنابراین عکس قضیه‌ی مطرح شده در گزینه‌ی ۲ صحیح است.

---

۱۳۲ - گزینه‌ی ۳

اگر وسط‌های اضلاع مثلث ABC را نقاط M، N و P بنامیم، آن‌گاه هر صفحه‌ای که از دو نقطه از این سه نقطه عبور کند، از رئوس مثلث ABC به یک فاصله است. حال کافی است از نقطه‌ای روی پاره‌خط MN، خطی موازی با خط Δ رسم کنیم. صفحه‌ی گذرنده بر MN و خط موازی با Δ، از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله بوده و قطعاً با خط Δ موازی است. به طور مشابه برای هر کدام از دو پاره‌خط MP و NP نیز می‌توان چنین صفحه‌ای پیدا کرد.

---

۱۳۳ - گزینه‌ی ۲

اگر زوایای بردار با محورهای x، y و z را به ترتیب α، β و γ بنامیم آن‌گاه داریم:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cos^2\gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{حاده}\ \gamma} \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین بردار مورد نظر به صورت $b=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ در نظر گرفته می‌شود. داریم:

$$a' = \frac{a.b}{|b|^2}\, b$$

$$= \frac{\cancel{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2} - \frac{2}{2}}{1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) = (2, 2, 2\sqrt{2})$$

---

۱۳۴ - گزینه‌ی ۳

فصل مشترک دو صفحه به صورت $\begin{cases} 2x-y=4 \\ z=0 \end{cases}$ و یا $\begin{cases} x=\frac{y+4}{2} \\ z=0 \end{cases}$ خواهد بود. با انتخاب نقطه‌ی $A_0(0,-4,0)$ بر روی این خط (فصل مشترک) داریم:

$$\begin{matrix} A(1,3,2) \\ A_0(0,-4,0) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{A_0A}\ (1,7,2)$$

بردار هادی خط به صورت $u=(1,2,0)$ است.

$$\begin{matrix} \overrightarrow{A_0A}\ (1,7,2) \\ u\ (1,2,0) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{A_0A}\times u = (-4,2,-5)$$

$$D\ (\text{فاصله‌ی نقطه از خط}) = \frac{|\overrightarrow{A_0A}\times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{16+4+25}}{\sqrt{1+4+0}}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3$$

۱۳۵- گزینه ی ۱

با توجه به آن که خط به معادله ی $3x+2y=a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس آن خط قائم بر دایره بوده و در نتیجه از مرکز دایره عبور می‌کند.

$$x^2+y^2-2x+y=1 \xrightarrow{\text{مرکز}} O(1,-\tfrac{1}{2})$$

$$3(1)+2(-\tfrac{1}{2})=a \Rightarrow a=2$$

۱۳۶- گزینه ی ۳

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

$$x^2 + \sqrt{3}\,xy = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}x'^2 + \frac{1}{4}y'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' + \frac{3}{4}x'^2 - \frac{3}{4}y'^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x'^2 - \frac{y'^2}{3} = 1$$

$$c^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow c = 2$$

بنابراین فاصله ی کانون تا مرکز در این هذلولی برابر $c=2$ است.

۱۳۷- گزینه ی ۳

$$\text{قسمت متقارن} = \frac{1}{2}(A + A^t) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

با استفاده از قاعده ی ساروس برای دترمینان این ماتریس داریم:

$$\text{دترمینان} = (105+0+0) - (0+63+20) = 22$$

۱۳۸- گزینه ی ۱

با افزوده شدن یک واحد به هر کدام از درایه های ستون دوم ماتریس A، به دترمینان ماتریس به اندازه ی مجموع همسازه های درایه های ستون دوم اضافه می‌شود. داریم:

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} + A_{22} + A_{32} = -9 + 0 + 6 = -3$$

۱۳۹- گزینه ی ۲

$$\begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-15^\circ) & -\sin(-15^\circ) \\ \sin(-15^\circ) & \cos(-15^\circ) \end{bmatrix}$$

$$= R_{(-15^\circ)}$$

$$R_{(-15^\circ)}^{12} = R_{12\times(-15^\circ)} = R_{-180^\circ} = R_{180^\circ} = I$$

۱۴۰- گزینه ی ۱

$$\begin{cases} x + 3y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ 5x + 4y + z = 9 \end{cases}$$

با حذف کردن مؤلفه z، یکبار بین معادلات اول و دوم و بار دیگر بین معادلات دوم و سوم داریم:

ادامه پاسخ ۱۴۰

$$\begin{cases} 6x + 7y = 16 \\ 6x + 7y = 24 \end{cases}$$

به وضوح این معادلات مربوط به دو خط موازی و غیرمنطبق است، پس فصل مشترک‌های دو به دوی این صفحات، موازی هستند.

۱۴۱ - گزینه‌ی ۴

با توجه به آن که تعداد داده‌ها برابر ۱۳ است، پس داده‌ی هفتم میانه بوده و در نتیجه چارک اول بین داده‌های سوم و چهارم و چارک سوم بین داده‌های دهم و یازدهم قرار می‌گیرد، یعنی نمودار جعبه‌ای شامل داده‌های چهارم تا دهم است:

۲۹, ۳۱, ۳۳, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۴۰

$$\bar{x} = \frac{29+31+33+34+35+36+40}{7} = 34$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{76}{7} = 10{,}85$$

۱۴۲ - گزینه‌ی ۲

اگر داده‌های جامعه‌ی اول را با x_iها و داده‌های جامعه‌ی دوم را با y_iها نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1} \Rightarrow 12{,}6 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 151{,}2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2} \Rightarrow 7{,}2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{24}$$

$$\Rightarrow \sum (y_i - \bar{y})^2 = 172{,}8$$

با توجه به آن که $\bar{x} = \bar{y}$، پس واریانس کل داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2} = \frac{324}{36} = 9$$

و در نتیجه انحراف معیار داده‌ها برابر $\sigma = 3$ است.

۱۴۳ - گزینه‌ی ۴

دنباله به صورت زیر است:

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...

بنابراین داریم:

$$U_2^2 - U_1 \times U_3 = 1^2 - 1 \times 2 = -1$$

$$U_3^2 - U_2 \times U_4 = 2^2 - 1 \times 3 = 1$$

$$U_4^2 - U_3 \times U_5 = 3^2 - 2 \times 5 = -1$$

$$U_5^2 - U_4 \times U_6 = 5^2 - 3 \times 8 = 1$$

بنابراین حاصل $U_n^2 - U_{n-1} \times U_{n+1}$ به صورت $(-1)^{n+1}$ است.

۱۴۴ - گزینه‌ی ۲

اگر ۳ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی سبز خارج کرده باشیم، شرط مورد نظر در سؤال برآورده نشده است. اما با انتخاب مهره‌ی هفتم یکی از سه وضعیت (حداقل ۴ مهره‌ی سفید یا حداقل ۳ مهره‌ی سیاه یا حداقل ۲ مهره‌ی سبز) به وقوع پیوسته است.

۱۴۵ - گزینه‌ی ۳

$$A_1 = \{0, 1\}$$

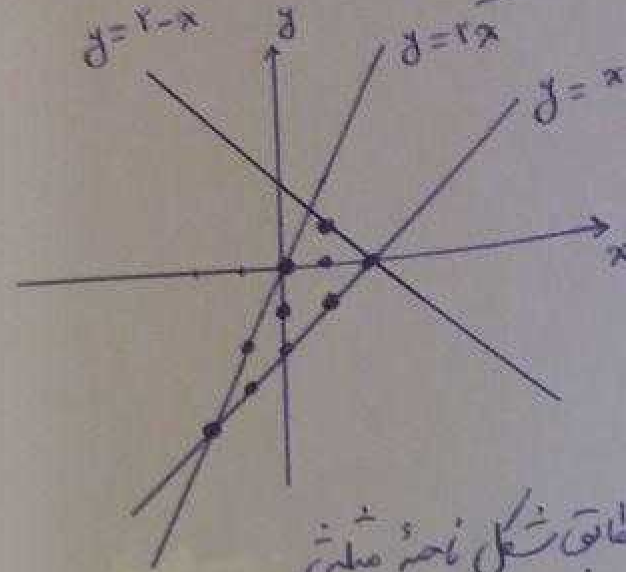
$$A_4 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A_8 = \{-7, -6, -5, -4, 4\} \cup \{0, 1\}$$

$$(A_8 - A_4) \cup A_1 = \{-7, -6, -5, -4, 4\}$$

$$= \{-7, -6, -5, -4, 0, 1, 4\}$$

۱۴۶- گزینه‌ی ۳



مطابق شکل ناحیه‌ی مثلثی بین سه خط جواب مسأله است که شامل این ۱۰ نقطه است:

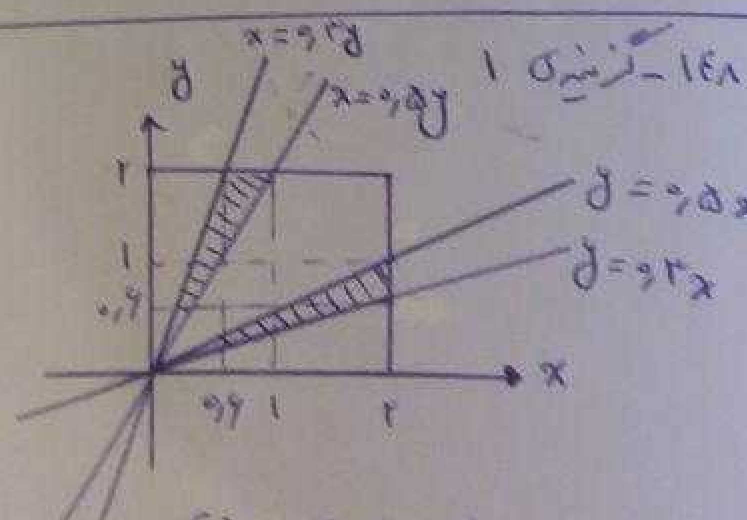
$(0,0),(1,0),(2,0),(1,1),(0,-1),(1,-1)$ و $(0,-2),(-1,-2),(-1,-3)$ و $(-2,-4)$

۱۴۷ - گزینه‌ی ۱

اگر پیشامد روشدن دو سکه را با A و پیشامد رو شدن ۶ برای تاس را با B نمایش دهیم، داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

۱۴۸- گزینه‌ی ۱



$$a(S)=2\times2=4$$

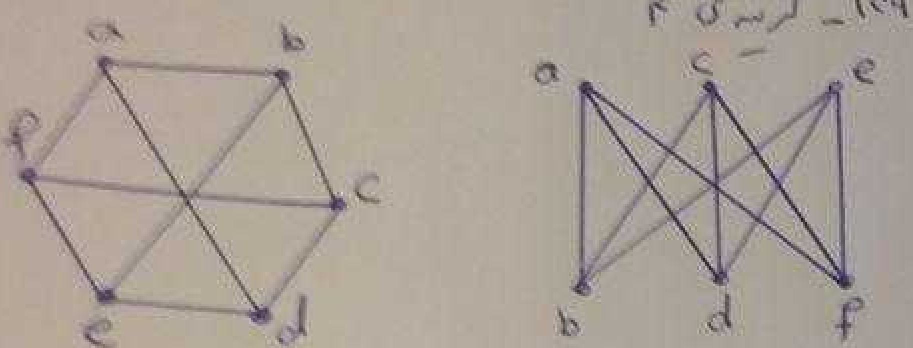
مساحت هر یک از دو ناحیه‌ی هاشور خورده برابر است با:

$$\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times2\times0.6=0.4$$

پس مساحت پیشامد مورد نظر یعنی $a(A)$ برابر $0.4+0.4=0.8$ است و داریم:

$$P(A)=\frac{a(A)}{a(S)}=\frac{0.8}{4}=0.2$$

۱۴۹- گزینه‌ی ۴



دو گراف فوق یکریخت هستند، پس کافی است تعداد دورهای به طول ۴ را در گراف سمت راست محاسبه کنیم.

هر دور به طول ۴ در این گراف، شامل ۲ رأس از بالا و ۲ رأس از پایین است، پس داریم:

$$\text{تعداد دورهای به طول ۴}=\binom{3}{2}\times\binom{3}{2}=3\times3=9$$

۱۵۰- گزینه‌ی ۳

اگر تعداد رأس‌های درجه یک را x فرض کنیم، آن‌گاه داریم:

$$q=p-1=6+x-1=5+x$$

$$\sum \deg v_i=2q\Rightarrow 21+x=2(5+x)$$

$$\Rightarrow 21+x=10+2x\Rightarrow x=11$$

۱۵۱- گزینه‌ی ۴

$$(abc)_9=(cb0a)_5$$
$$\Rightarrow c+9b+81a=a+25b+125c$$
$$\Rightarrow 80a-16b=124c\xRightarrow{\div 4}20a-4b=31c$$
$$\Rightarrow 4(5a-b)=31c$$

بنابراین $c=4$ است و در نتیجه $5a-b=31$ خواهد بود، یعنی $a=7$ و $b=4$ است ولی چون در مبنای ۵، رقم ۷ وجود ندارد، این حالت نشدنی است

۱۵۲- گزینه‌ی ۲

$$48p+1=n^2 \Rightarrow 48p=n^2-1$$

$$\Rightarrow 48p=(n-1)(n+1)$$

تنها حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$\begin{cases} n+1=2p \Rightarrow 26=2p \Rightarrow \boxed{p=13} \\ n-1=24 \Rightarrow n=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n+1=24 \Rightarrow n=23 \\ n-1=2p \Rightarrow 22=2p \Rightarrow \boxed{p=11} \end{cases}$$

۱۵۳- گزینه‌ی ۴

$$5^3=125 \overset{31}{\equiv} 1 \Rightarrow 5^{3n} \overset{31}{\equiv} 1 \Rightarrow 5^{6n} \overset{31}{\equiv} 1$$

$$5^{3n+2} \overset{31}{\equiv} 5^{3n}\times 5^2 \overset{31}{\equiv} 1\times 25 \overset{31}{\equiv} -6$$

$$5^{6n+4} \overset{31}{\equiv} 5^{6n}\times (5^2)^2 \overset{31}{\equiv} 1\times(-6)^2 \overset{31}{\equiv} 36$$

$$\overset{31}{\equiv} 5$$

$$5^{6n+4}+5^{3n+2}+1 \overset{31}{\equiv} 5-6+1 \overset{31}{\equiv} 0$$

بنابراین عبارت موردنظر به ازای تمامی مقادیر n بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

۱۵۴- گزینه‌ی ۱

تعداد حالت‌هایی که ۶ توپ (یکسان) در ۳ جعبه‌ی متمایز قرار می‌گیرند، برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=6$، یعنی $\binom{8}{2}=28$ است.

تعداد حالت‌هایی که هیچ جعبه‌ای بدون توپ نماند برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $y_1+y_2+y_3=3$ یعنی $\binom{5}{2}=10$ است.

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$$

تذکر: در مرحله‌ی دوم به جای هر یک از xها، $y+1$ قرار داده شده است.

۱۵۵- گزینه‌ی ۳

$$P(\{b,c\})=P(\{a,b,c\})-P(a)$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

$$P(\{b,c,e\}\mid\{a,b,c\})$$
$$=\frac{P(\{b,c,e\}\cap\{a,b,c\})}{P(\{a,b,c\})}$$
$$=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{a,b,c\})}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}$$