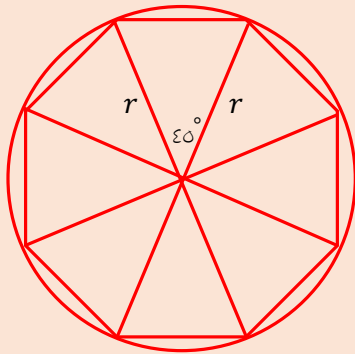




سوال ۱۲۵: (سطح سوال: ساده)

وقتی هشت ضلعی منتظم داخل دایره محاط می‌شود به این معناست که مرکز دایره بر مرکز هشت ضلعی منتظم منطبق شده! در چنین حالتی اگر مرکز هشت ضلعی را O به رئوسش وصل کنیم، ۸ تا مثلث متساوی الساقین هم‌نوع با طول ساقی برابر شعاع دایره به وجود می‌آید که زاویه‌ی رأس هرکدامش می‌شود $\angle = 45^\circ = \frac{360^\circ}{8}$. بنابراین برای مساحت یکیش داریم:

(مساحت یک مثلث می‌شود نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بینشون...)



$$S = \frac{r \times r \times \sin 45^\circ}{2} = \frac{2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \sqrt{2}$$

بنابراین مساحت هشت ضلعی منتظم برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی منتظم}} = 8S = 8\sqrt{2}$$

سوال ۱۲۶: (سطح سوال: متوسط)

کاملاً واضح است که مثلث‌های ABN و CDM هم‌نوعند! لذا $DF = EB$ ضمناً ABD قائم‌الزاویه، بنابراین:

$$AB^2 = BE \times BC \rightarrow 9 = BE \times 12 \rightarrow BE = DF = \frac{9}{12}$$

$$\rightarrow EF = 12 - 2 \times \frac{9}{12} = \frac{7}{2}$$

$$EN \parallel CF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \rightarrow \frac{\frac{9}{12}}{\frac{9}{12} + \frac{7}{2}} = \frac{BN}{12} \rightarrow BN = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

$$\rightarrow NC = 12 - \frac{9}{4} = \frac{39}{4}$$

$$S_{ABCD} = AB \times NC = 3 \times \frac{39}{4} = \frac{117}{4} = 29.25$$

سوال ۱۲۷: (سطح سوال: ساده)

با توجه به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده. حالا داریم:

نکته ۱: از دوران یک مستطیل حول طولش یک استوانه به ارتفاعی برابر طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکته ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطرش، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید. بنابراین با توجه به این دو نکته شکل ما یک استوانه می‌شود که از درونش یک کره فالی شده‌است.

$$V_{\text{هاشور فورده}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(2)^2 \times 5 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2}{2}\right)^3 = 20\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{56}{3}\pi$$

سوال ۱۲۸: (سطح سوال: ساده)

بیان سوال رو ترجمه کنیم:

می‌دونیم در یک دایره، هرچه فاصله‌ی یک وتر از مرکز اون بیش تر بشه، طول وتر کوچک تر می‌شه!!!
بنابراین در چهار ضلعی $ABCD$ قطعاً AB کوچک ترین ضلع می‌شه و BC بزرگ ترین ضلع!

پس ترتیب اضلاع این چهارضلعی یکی از دو حالت زیر خواهد بود:

$$AB < CD < DA < BC \quad \text{or} \quad AB < DA < CD < BC$$

ضمناً اینو هم می‌دونیم که اندازه‌ی هر کمان یک دایره کاملاً متناسب با اندازه‌ی وتر اون کمان! لذا ترتیب کمان‌های این دایره هم یکی از دو حالت بالا خواهد بود.

مال تک تک گزینه‌ها رو بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: صحیح است

$$\hat{D} = \frac{\overline{ABC}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2} > \frac{\overline{AB} + \overline{DA}}{2} > \frac{\overline{DAB}}{2} = \hat{C}$$

گزینه ۲: صحیح است

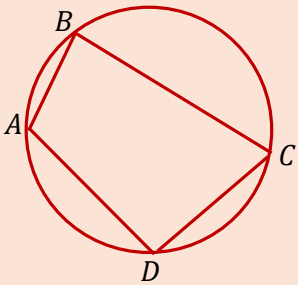
$$\hat{B} = \frac{\overline{ADC}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{CD}}{2} > \frac{\overline{AB} + \overline{DA}}{2} > \frac{\overline{DAB}}{2} = \hat{C}$$

گزینه ۳: صحیح است

$$\hat{A} = \frac{\overline{BCD}}{2} = \frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{2} > \frac{\overline{AD} + \overline{CD}}{2} > \frac{\overline{ADC}}{2} = \hat{B}$$

گزینه ۴: لزوماً صحیح نیست لذا جواب این مساله خواهد بود.

$$\hat{B} = \frac{\overline{ADC}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{CD}}{2} \quad (\text{نامشخص}) \quad \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2} > \frac{\overline{ABC}}{2} = \hat{D}$$



سوال ۱۲۹: (سطح سوال: متوسط)

اول شکل رو رسم می‌کنیم:

$$AH = ۸, r = ۳ \rightarrow AO = ۵ \rightarrow AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = \sqrt{۵^2 - ۳^2} = ۴$$

در این شکل از نقطه‌ی B دو تا مماس بر دایره رسم شده لذا کاملاً واضح که $BE = BH = x$

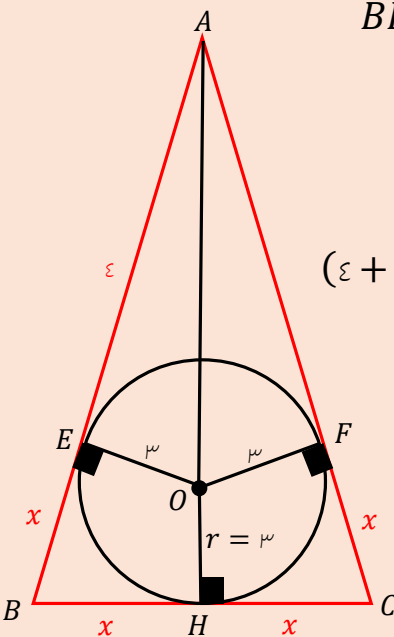
(ضمناً می‌دونیم $BH = HC$ ، لذا: $BE = BH = HC = CF = x$)

حالا با یه فیثاغورس در مثلث AHB مقدار x به دست می‌آد:

$$(\varepsilon + x)^2 = x^2 + ۸^2 \rightarrow$$

$$(\varepsilon + x)^2 - x^2 = ۸^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\varepsilon + x - x)(\varepsilon + x + x) = ۶۴ = \varepsilon(2x + \varepsilon)$$

$$\rightarrow x = ۶ \rightarrow BC = 2x = ۱۲$$



سوال ۱۳۰: (سطح سوال: ساده)

تبدیلی که در این سوال داریم یک تناسب به مرکز مبدأ مقتضات و با ضریب $k = ۳$ هست (تجانس که عجیب شبیه تشابه!!!). بنابراین تست این تبدیل دایره‌ای به مرکز $(۱, ۲)$ و با شعاع a به دایره‌ای به مرکز $(۳, ۶)$ و شعاع ۳ تبدیل می‌شه. بنابراین دو تا دایره داریم که می‌فوییم طول مماس مشترک فارغیشونو به دست بیاریم که فرمولش این شکلیه:

$$۴۰۰ = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}$$

d می‌شه فاصله مرکزین دو تا دایره:

$$d = \sqrt{(۳ - ۱)^2 + (۶ - ۲)^2} = \sqrt{۴ + ۱۶} = ۲\sqrt{۵}$$

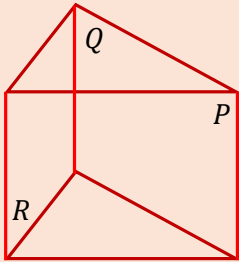
$$۴۰۰ = \sqrt{(۲\sqrt{۵})^2 - (۳ - ۱)^2} = ۴$$

سوال ۱۳۱: (سطح سوال: متوسط)

عکس قضیه‌ی هر گروه از گزینه‌ها رو بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی ۴: عکس قضیه، همون قضیه‌ی تالس در فضای که قطعاً برقرار نیست!!!

گزینه‌ی ۳: عکس قضیه؛ اگر فصل مشترک‌های صفحه‌ی R با دو صفحه‌ی دیگر، با یکدیگر موازی باشند، آنگاه آن دو صفحه موازی اند.



قطعاً عکس قضیه‌ی گزینه‌ی ۳ صحیح نخواهد بود چون به راحتی و اسش می‌تونیم مثال نقض بیاریم.

در شکل مقابل صفحه‌ی R با صفحات P, Q متقاطع بوده و دو فصل مشترک موازی با آن‌ها ایجاد می‌کند در حالیکه صفحات P و Q موازی نیستند.

گزینه‌ی ۲: عکس قضیه؛ اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد آنگاه با همه‌ی خطوط آن صفحه موازی است.

اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد با بی‌شمار از خطوط آن صفحه موازی و با بقیه متناظر است؛ لذا لزوماً با همه‌ی خطوط آن صفحه موازی نیست!!!

گزینه‌ی ۱: عکس قضیه؛ اگر هر خط عمود بر d بر خط d' نیز عمود باشد آنگاه d, d' موازیند.

تمامی خطوط عمود بر خط d تشکیل یک صفحه خواهند داد که بر d عمود است و چون این خطوط بر d' نیز عمودند لذا صفحه‌ی حاصل بر d' نیز عمود است. بنابراین d و d' هر دو بر یک صفحه عمودند، لذا حتماً با یکدیگر موازیند. بنابراین این گزینه پاسخ صحیح خواهد بود.

سوال ۱۳۲: (سطح سوال: سخت)

چهار دسته صفحه وجود دارد که از سه نقطه‌ی A, B, C که بر یک خط راست واقع نیستند، به یک فاصله است.

دسته اول: تمام صفحات موازی با صفحه‌ی عبوری از نقاط A, B, C ؛ که قطعاً این دسته از صفحات مورد نظر این سوال نیست زیرا خط Δ با صفحه‌ی عبوری از A, B, C متقاطع است.

دسته دوم: تمام صفحاتی که از وسط ضلع‌های AB, AC می‌گذرد. (وسط AC را N و وسط AB را M می‌نامیم)

دسته سوم: تمام صفحاتی که از وسط ضلع‌های AB, BC می‌گذرد. (وسط BC را O می‌نامیم)

دسته چهارم: تمام صفحاتی که از وسط ضلع‌های AC, BC می‌گذرد.

خط Δ با هر یک از خطوط MN, MO, NO یا متناظر و یا متقاطع است (چون نمی‌تواند باهاشون موازی باشه). بنابراین

در هر کدام از دسته‌های دوم و سوم و چهارم، یک صفحه وجود دارد که با خط Δ موازی یا منطبق باشد؛ بنابراین جواب مساله ۳ صفحه خواهد بود.