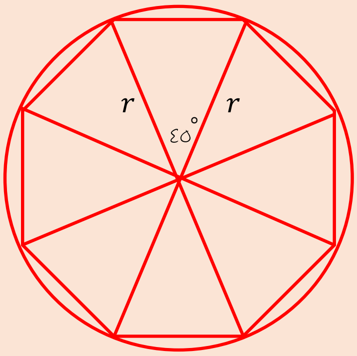
سوال ۱۲۵: (سطح سوال: ساده)

وقتی هشت ضلعی منتظم داخل دایره محاط می‌شه به این معناست که مرکز دایره بر مرکز هشت ضلعی منتظم منطبق شده! در چنین حالتی اگر مرکز هشت ضلعی رو به رئوسش وصل کنیم، ۸ تا مثلث متساوی‌الساقین همنهشت با طول ساقی برابر شعاع دایره به وجود می‌آد که زاویه‌ی رأس هرکدومش می‌شه $45^\circ = \frac{360^\circ}{8}$. بنابراین برای مساحت یکیش داریم:

(مساحت یک مثلث می‌شه نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بینشون...)

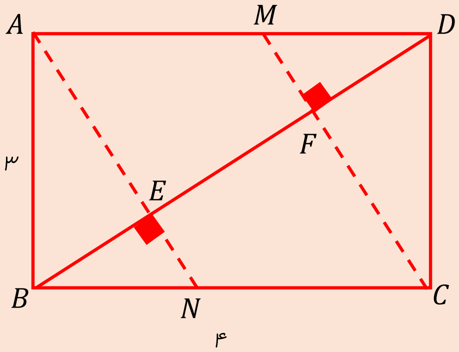


$$S = \frac{r \times r \times \sin 45^\circ}{2} = \frac{2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \sqrt{2}$$

بنابراین مساحت هشت ضلعی منتظم برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی منتظم}} = 8S = 8\sqrt{2}$$

سوال ۱۲۶: (سطح سوال: متوسط)



کاملاً واضح است که مثلث‌های ABN و CDM همنهشتند! لذا $DF = EB$

ضمناً ABD قائم‌الزاویه، بنابراین:

$$AB^2 = BE \times BC \to 9 = 5BE \to BE = DF = \frac{9}{5}$$

$$\to EF = 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5}$$

$$EN \| CF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \to \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5} + \frac{7}{5}} = \frac{BN}{4} \to BN = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

$$\to NC = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_{ABCD} = AB \times NC = 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} = 5/25$$

سوال ۱۲۷: (سطح سوال: ساده)

با توجه به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده. حالا داریم:

نکته۱: از دوران یک مستطیل حول طولش یک استوانه به ارتفاعی برابر طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکته۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطرش، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید.

بنابراین با توجه به این دو نکته شکل ما یک استوانه می‌شه که از درونش یک کره خالی شده‌است.

$$V_{\text{هاشور خورده}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(2)^2 \times 5 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 20\pi - \frac{9}{2}\pi = 15/5\pi$$

سوال ۱۲۸: (سطح سوال: ساده)

بیایین سوال رو ترجمه کنیم:

می‌دونیم در یک دایره، هرچه فاصله‌ی یک وتر از مرکز اون بیش‌تر بشه، طول وتر کوچک‌تر می‌شه!!!

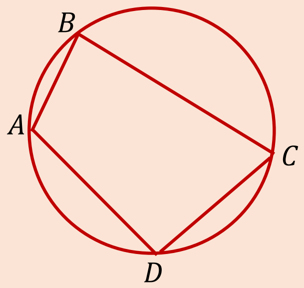
بنابراین در چهار ضلعی $ABCD$ قطعاً AB کوچک‌ترین ضلع می‌شه و BC بزرگ‌ترین ضلع!

پس ترتیب اضلاع این چهارضلعی یکی از دو حالت زیر خواهد بود:

$$AB < CD < DA < BC \quad or \quad AB < DA < CD < BC$$

ضمناً اینو هم می‌دونیم که اندازه‌ی هر کمان یک دایره کاملاً متناسب با اندازه‌ی وتر اون کمانِ! لذا ترتیب کمان‌های این دایره هم یکی از دو حالت بالا خواهد بود.

حال تک‌تک گزینه‌ها رو بررسی می‌کنیم:



گزینه ۱: صحیح است

$$\widehat{D} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{۲} > \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DA}}{۲} > \frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲} = \widehat{C}$$

گزینه ۲: صحیح است

$$\widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD}}{۲} > \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DA}}{۲} > \frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲} = \widehat{C}$$

گزینه ۳: صحیح است

$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{۲} > \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD}}{۲} > \frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲} = \widehat{B}$$

گزینه ۴: لزوماً صحیح نیست لذا جواب این مساله خواهد بود.

$$\widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD}}{۲} \ (\text{نامشخص}) \ \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{۲} > \frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲} = \widehat{D}$$

سوال ۱۲۹: (سطح سوال: متوسط)

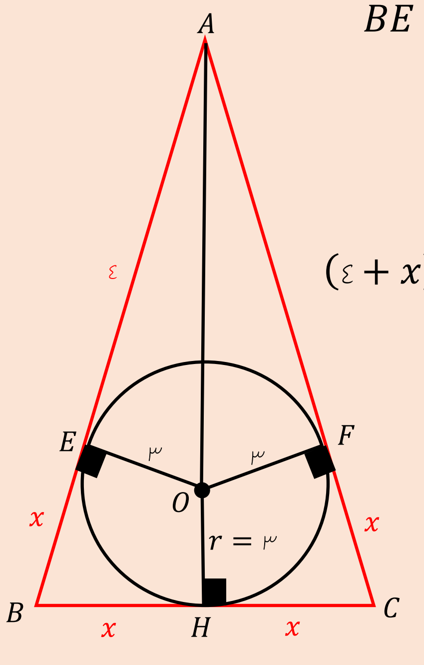
اول شکل رو رسم می‌کنیم:

$$AH = ۸, r = ۳ \rightarrow AO = ۵ \rightarrow AE = \sqrt{AO^۲ - OE^۲} = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

در این شکل از نقطه‌ی B دو تا مماس بر دایره رسم شده لذا کاملاً واضحِ که $BE = BH = x$

(ضمناً می‌دونیم $BH = HC$، لذا: $BE = BH = HC = CF = x$)

حالا با یه فیثاغورس در مثلث AHB مقدار x به دست می‌آد:



$$(۴ + x)^۲ = x^۲ + ۸^۲ \rightarrow$$

$$(۴ + x)^۲ - x^۲ = ۸^۲ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (۴ + x - x)(۴ + x + x) = ۶۴ = ۴(۲x + ۴)$$

$$\rightarrow x = ۶ \rightarrow BC = ۲x = ۱۲$$

سوال ۱۳۰: (سطح سوال: ساده)

تبدیلی که در این سوال داریم یک تجانس به مرکز مبدا مختصات و با ضریب $k = ۳$ هست (تجانسم که عجیب شبیه تشابه!!!).

بنابراین تحت این تبدیل دایره‌ای به مرکز (۲و۱) و با شعاع ۱، به دایره‌ای به مرکز (۶و۳) و شعاع ۳ تبدیل می‌شه.

بنابراین دو تا دایره داریم که می‌خوایم طول مماس مشترک خارجیشونو به دست بیاریم که فرمولش این شکلیه:

$$\text{م.م.خ} = \sqrt{d^۲ - (r - r')^۲}$$

d می‌شه خط‌المرکزین دو تا دایره:

$$d = \sqrt{(۳ - ۱)^۲ + (۶ - ۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶} = ۲\sqrt{۵}$$

$$\text{م.م.خ} = \sqrt{\left(۲\sqrt{۵}\right)^۲ - (۳ - ۱)^۲} = ۴$$

سوال ۱۳۱: (سطح سوال: متوسط)

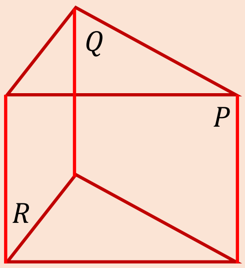
عکس قضیه‌ی هر کدوم از گزینه‌ها رو بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی ۴: عکس قضیه، همون قضیه‌ی تالس در فضاس که قطعاً برقرار نیست!!!

گزینه‌ی ۳: عکس قضیه: اگر فصل مشترک‌های صفحه‌ی R با دو صفحه‌ی دیگر، با یکدیگر موازی باشند، آنگاه آن دو صفحه موازی‌اند.

قطعاً عکس قضیه‌ی گزینه‌ی ۳ صحیح نخواهد بود چون به راحتی واسش می‌تونیم مثال نقض بیاریم.

در شکل مقابل صفحه‌ی R با صفحات P, Q متقاطع بوده و دو فصل مشترک موازی با آن‌ها ایجاد می‌کنند در حالیکه صفحات P و Q موازی نیستند.



گزینه‌ی ۲: عکس قضیه: اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد آنگاه با همه‌ی خطوط آن صفحه موازی است.

اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد با بی‌شمار از خطوط آن صفحه موازی و با بقیه متنافر است؛ لذا لزوماً با همه‌ی خطوط آن صفحه موازی نیست!!!

گزینه‌ی ۱: عکس قضیه: اگر هر خط عمود بر d بر خط d' نیز عمود باشد آنگاه d, d' موازیند.

تمامی خطوط عمود بر خط d تشکیل یک صفحه خواهند داد که بر d عمود است و چون این خطوط بر d' نیز عمودند لذا صفحه‌ی حاصل بر d' نیز عمود است. بنابراین d و d' هر دو بر یک صفحه عمودند، لذا حتماً با یکدیگر موازیند. بنابراین این گزینه پاسخ صحیح خواهد بود.

سوال ۱۳۲: (سطح سوال: سخت)

چهار دسته صفحه وجود دارد که از سه نقطه‌ی A, B, C که بر یک خط راست واقع نیستند، به یک فاصله است.

دسته اول: تمام صفحات موازی با صفحه‌ی عبوری از نقاط A, B, C؛ که قطعاً این دسته از صفحات مورد نظر این سوال نیست زیرا خط Δ با صفحه‌ی عبوری از A, B, C متقاطع است.

دسته دوم: تمام صفحاتی که از وسط ضلع‌های AB, AC می‌گذرد. (وسط AC را N و وسط AB را M می‌نامیم)

دسته سوم: تمام صفحاتی که از وسط ضلع‌های AB, BC می‌گذرد. (وسط BC را O می‌نامیم)

دسته چهارم: تمام صفحاتی که از وسط ضلع‌های AC, BC می‌گذرد.

خط Δ با هر یک از خطوط MN, MO, NO یا متنافر و یا متقاطع است (چون نمی‌تواند باهاشون موازی باشه). بنابراین در هر کدام از دسته‌های دوم و سوم و چهارم، یک صفحه وجود دارد که با خط Δ موازی یا منطبق باشد؛ بنابراین جواب مساله ۳ صفحه خواهد بود.